

DESENVOLVIMENTO DE *WEBSITE* ABORDANDO OS FUNDAMENTOS DA ÁLGEBRA TENSORIAL E O ACOPLAMENTO ENTRE A PLASTICIDADE E O DANO

L. F. Kaefer e W. S. Assis

Ambos do

Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP

(07 de Janeiro de 2001)

Resumo

Este trabalho apresenta as ferramentas e processos utilizados para o desenvolvimento de um *website* para a disciplina *Introdução à Mecânica do Dano e Fraturamento*, e traz uma introdução ao estudo do acoplamento entre a plasticidade e o dano, que também foi incluído no *Website*.

Websites com servidores de *ftp* e mídia são ferramentas valiosas para qualquer disciplina a partir do momento no qual tivermos acesso à Internet fácil para alunos e professores e começarmos a utilizar mídias digitais. O *website* funciona como um mecanismo de organização (das mídias digitais), informação (avisos do professor e links relacionados com a disciplina), de melhoria do diálogo e de facilitação do aprendizado.

1 Desenvolvimento de *website* para a disciplina

“Introdução à Mecânica do Dano e Fraturamento”

1.1 Introdução

O objetivo deste trabalho é descrever a experiência dos autores ao desenvolver um *website* para a disciplina “Introdução à Mecânica do Dano e Fraturamento” do programa de pós-graduação do Departamento de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e da Escola de Engenharia da Universidade de São Paulo do campus de São Carlos.

A motivação inicial para o desenvolvimento do sistema vem do fato de as aulas serem ministradas para os alunos em São Paulo e em São Carlos através do sistema de vídeo conferência. Desta forma, neste sistema de ensino torna-se muito importante a existência de um local (virtual) que

funcione como repositório das notas de aula e material de apoio e de ponto de encontro de professores e alunos das duas cidades.

1.2 Materiais Utilizados

Neste trabalho utilizamos os equipamentos:

- Microcomputador *IBM PC Pentium III*;
- Placa de aquisição de vídeo *Pinnacle* (para digitalização dos vídeos em VHS);

e as ferramentas (*softwares*) de desenvolvimento:

- **Microsoft Word:** utilizado para a redação das notas de aula e exportação do texto formatado para a linguagem HTML e conversão das equações do *Equation Editor* em imagens;
- **Conversor de Mídia do Microsoft Media Player:** utilizado para conversão (compactação) dos vídeos digitalizados em formato *.avi* para *.asf* (*Windows Media Streaming*);
- **Corel Draw:** editor gráfico utilizado para desenhar as figuras;
- **Macromedia Flash:** programa utilizado para a confecção das animações;
- **Macromedia Dreamweaver:** editor gráfico de HTML. Utilizado para a confecção da diagramação das páginas, acabamento final do HTML criado pelo *Word* e programação do código em *JavaScript*;
- **Acrobat Writer:** permite converter apresentações do *PowerPoint*, textos do *Word* (e de outros tipos de documento) para o formato *.pdf*, diminuindo o tamanho dos arquivos, fixando a formatação e impedindo que os documentos sejam editados por terceiros;

1.3 Metodologia Utilizada

Ao elaborarmos a interface gráfica a preocupação principal foi a de fazer um *layout* de página agradável, que preservasse a maior quantidade de área de tela para a visualização do conteúdo (e não de menus) e no qual todos os recursos pudessem ser acessados de uma maneira intuitiva e com uma quantidade mínima de cliques de mouse.

Para tanto elaboramos a interface apresentada na figura abaixo, na qual todos os *links* principais foram dispostos no menu *drop-down* superior.



Figura 1 – Tela Inicial

Em virtude da quantidade grande de trabalho tivemos de restringir nossa plataforma de implementação para o *Internet Explorer 5 e 5.5* e para uma resolução de tela de *800x600 pixels*. Desta forma as páginas desenvolvidas não devem ser visualizadas com o *Netscape Navigator* ou com uma resolução de tela diferente de *800x600*.

Através do menu “Conteúdo” podemos acessar as notas de aula:

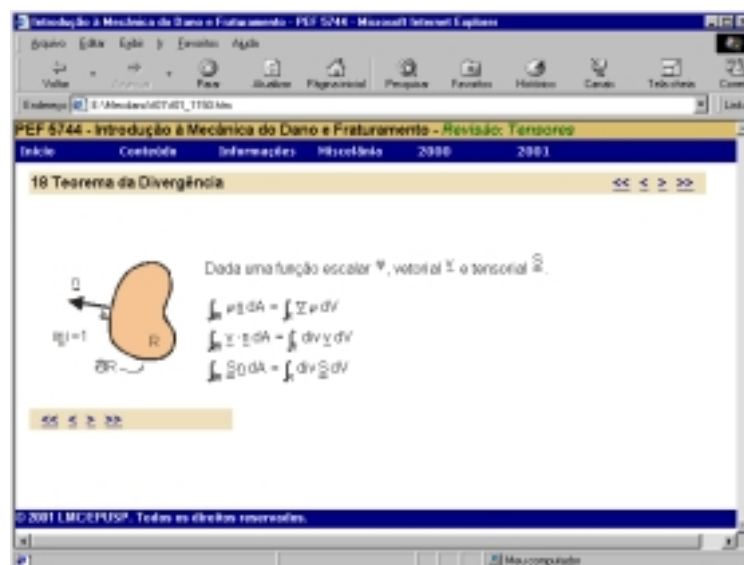


Figura 2 – Página com notas de aula

O menu “Informações” contém informações sobre a disciplina (ementa e programação) e sobre os professores.

O menu “Miscelânea” engloba a área de download e de links:

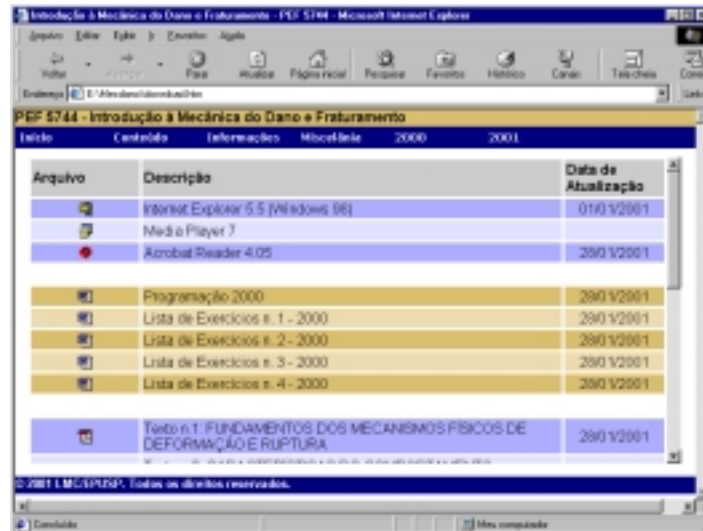


Figura 3 – Área de Download

Na área de download tivemos a preocupação de deixar todos os programas necessários para a visualização do conteúdo desenvolvido.

O menu “2000” apresenta a lista de alunos, a programação de aulas do ano 2000 e os temas de seminários.

Dessa forma, consideramos que a utilização de recursos de ensino baseados na Internet é muito importante, mas que ainda é uma área de muito estudo, para que possamos obter o ganho máximo de produtividade para aulas e estudo que os recursos disponíveis atualmente já podem nos proporcionar. Ressaltamos ainda que o dispêndio de tempo é muito grande para converter um curso ministrado convencionalmente em um curso baseado na *web* e que a forma de apresentação do curso deve ser muito bem arquitetada, evitando que o aluno se irrite ou se disperse ao utilizar os recursos digitais.

2 Estudo do acoplamento entre a plasticidade e o dano

2.1 O conceito de Dano

O dano é uma grandeza física que não é mensurável diretamente, e pode ser entendido como o decréscimo das propriedades elásticas do material em consequência da redução das áreas de transmissão das forças internas, que decorre da nucleação e subsequente crescimento de microfissuras e microcavidades.

Nos meios homogêneos, a danificação é essencialmente o processo de rompimento das ligações atômicas. Nos metais as rupturas das ligações ocorrem após um processo de plastificação e encruamento, que consiste na movimentação e posterior acúmulo de discordâncias causado pela presença de algum microdefeito. O acúmulo de várias discordâncias leva ao rompimento de várias ligações, originando uma microfissura.

Sob uma perspectiva mais precisa, o dano pode ser representado por um escalar \mathbf{D} , que representa a densidade superficial de microfissuras e microcavidades em um plano qualquer do interior do material. Esse conceito foi proposto originalmente por Kachanov (1958), quando buscou descrever a ruptura frágil por fluência em metais solicitados uniaxialmente à tração sob elevadas temperaturas. Posteriormente, essa idéia passou por algumas modificações e aperfeiçoamentos decorrentes de estudos realizados pelo próprio Kachanov (1986), por Lemaitre e Chaboche (1985), Krajcinovic (1989) e outros.

De acordo com o conceito originalmente formulado por Kachanov (ainda hoje aceito), se ΔS for a área de um plano qualquer que intercepta o interior do material, $(1-\mathbf{D}) \Delta S$ corresponde à área que efetivamente transmite as tensões. Conseqüentemente,

$$0 \leq \mathbf{D} \leq 1$$

Quando $\mathbf{D}=0$, dizemos que o material encontra-se em um estado não-danificado, ao passo que no instante em que $\mathbf{D}=1$ o material está totalmente danificado, ou seja, está fraturado. No entanto, verifica-se na prática que o elemento sofre fraturamento antes que o dano alcance a unidade, fato que se dá em virtude das rupturas das ligações dos átomos do material. Conseqüentemente, é coerente estabelecer um critério de iniciação de fraturamento, sendo esse dado por :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_c$$

Onde \mathbf{D}_c representa o dano crítico.

Atualmente, muitos avanços têm ocorrido na teoria do dano. Mazars & Pjaudier-Cabot apresentam uma revisão dos diferentes modelos baseados na Mecânica do Dano Contínuo formulados no Laboratoire de Mécanique et Technologie (Cachan, França). Comportamento dúctil e efeitos unilaterais, como fechamento de fissuras, são discutidos em conjunto com análises numéricas, a fim de analisar materiais como o concreto simples e armado, sendo efetuada a proposição de modelos adequados para cada caso.

2.2 Formulação Termodinâmica

Consideremos que as deformações plásticas $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ sejam expressas, em relação às deformações totais e elásticas, como $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^e$, e que $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ sejam variáveis internas (respectivamente um tensor de segunda ordem e um escalar) associados a duas formas de encruamento: cinemático, através de $\boldsymbol{\alpha}$, e isotrópico, por meio de $\boldsymbol{\beta}$. A energia livre por unidade de volume é considerada segundo a expressão abaixo:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \theta, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{D}) \quad (2.2.1)$$

onde θ denota a temperatura e \mathbf{D} o dano.

As equações de estado correspondentes são fornecidas por:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} \quad \mathbf{S} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \theta} \quad \mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \boldsymbol{\beta}} \quad \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \quad \mathbf{Y} = -\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \mathbf{D}} \quad (2.2.2)$$

a dissipação vale:

$$\Phi = \Phi_q + \Phi_{intr} \quad (2.2.3)$$

onde:

Φ_q é dissipação térmica, dada por :

$$\Phi_q = \theta_q \nabla \left(\frac{1}{\theta} \right) \quad (2.2.4)$$

Φ_{intr} é chamada de dissipação intrínseca, e vale :

$$\Phi_{intr} = \boldsymbol{\sigma} : \left(\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_p}{dt} \right) + \mathbf{A} : \left(\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} \right) + \mathbf{B} \left(\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} \right) + \mathbf{Y} \left(\frac{d\mathbf{D}}{dt} \right) \quad (2.2.5)$$

Considerando a hipótese da generalização normalizada, assumiremos a existência do pseudo-potencial de dissipação \mathbf{D}^* , o qual se relaciona com as derivadas temporais apresentadas em (2.2.5) conforme apresentado abaixo:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial A} \quad \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial B} \quad \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial Y} \quad (2.2.6)$$

2.3 Elastoplasticidade de um corpo danificado

2.3.1 Critério de danificação

Para um modelo unidimensional no qual seja admitido elasticidade acoplada com dano, a função de energia vale:

$$W_e = \frac{1}{2} E(1 - \mathbf{D})(\boldsymbol{\varepsilon}^e)^2 \quad (2.3.1)$$

A função de energia descrita por (2.3.1) vale desde que o dano efetue um decréscimo na elasticidade do material segundo a taxa $(1 - \mathbf{D})$. Segundo Kachanov (1958) e Rabotnov (1963), é possível escrever também:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W_e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (1 - \mathbf{D})E\boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.3.2)$$

de forma que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{(1 - \mathbf{D})E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{ef}}{E} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E_{ef}} \quad (2.3.3)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}_{ef} = \boldsymbol{\sigma} / (1 - \mathbf{D})$ é a tensão efetiva (referente à superfície que realmente efetua a transmissão das forças internas) e E_{ef} é o módulo de elasticidade efetivo, o qual leva em conta a ocorrência da danificação do material.

Em um material elástico linear anisotrópico com dano isotrópico (não acoplado com plasticidade, considerando uma evolução isotérmica que não leva em conta os efeitos da temperatura), a energia livre dada pela equação (2.3.4) proporciona um modelo bastante adequado.

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{D}) = \mathbf{W}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{D}) + \mathbf{W}^p(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \quad (2.3.4)$$

onde:

$$\mathbf{W}^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{D}) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{D})\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e. \quad (2.3.5)$$

Portanto, como uma generalização de (2.3.2) nós teremos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{W}^e}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} = (\mathbf{1} - \mathbf{D})\mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.3.6)$$

além de:

$$\mathbf{Y} = -\frac{\partial \mathbf{W}^e}{\partial \mathbf{D}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^e : \mathbf{E} : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.3.7)$$

e:

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{W}^p}{\partial \boldsymbol{\beta}}, \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{W}^p}{\partial \boldsymbol{\alpha}}. \quad (2.3.8)$$

A equação (2.3.7) mostra a força generalizada \mathbf{Y} , que é a variável termodinâmica dual de \mathbf{D} .

Para um material elástico linear isotrópico iremos obter:

$$\mathbf{Y} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_y^2}{2\mathbf{E}(\mathbf{1} - \mathbf{D})^2} \mathbf{R}_v \quad (2.3.9)$$

onde:

$$\boldsymbol{\sigma}_y = \left(\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}_{ij}^d \boldsymbol{\sigma}_{ij}^d \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^d = \boldsymbol{\sigma}_{ij} - \boldsymbol{\sigma}_m \boldsymbol{\delta}_{ij}, \quad (2.3.11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_m = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 + \boldsymbol{\sigma}_3), \quad (2.3.12)$$

são, respectivamente, a tensão equivalente (2.3.10), a tensão desviadora (2.3.11) e a tensão média (2.3.12).

Também:

$$\mathbf{R}_v = \frac{2}{3}(1 + \nu) + 3(1 - 2\nu) \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}_m}{\boldsymbol{\sigma}_y} \right)^2 \quad (2.3.13)$$

Na equação (2.3.13) E e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do material não-danificado.

O dimensionamento da quantidade R_v e sua importância podem ser visualizados a partir do critério de danificação proposto por Lemaitre e Chaboche (1985), pelo qual:

$$\sigma_y \sqrt{R_v} - \sigma^* = 0 \quad (2.3.14)$$

2.3.2 Evolução dos parâmetros de danificação

Para um modelo unidimensional pode-se afirmar que:

$$E_{ef} = (1 - D)E, \text{ ou seja : } D = 1 - \frac{E_{ef}}{E} \quad (2.3.15)$$

Em um teste de fadiga de baixa frequência, tanto E como E_{ef} podem ser cuidadosamente medidos, de modo que é possível plotar um gráfico relacionando o número de ciclos de carga e descarga com o dano. A figura 2.3.1 apresenta o gráfico obtido quando o aço inoxidável A316 é submetido a um ensaio de fadiga a temperatura constante (550°C), e exibe a acumulação do dano durante o processo.

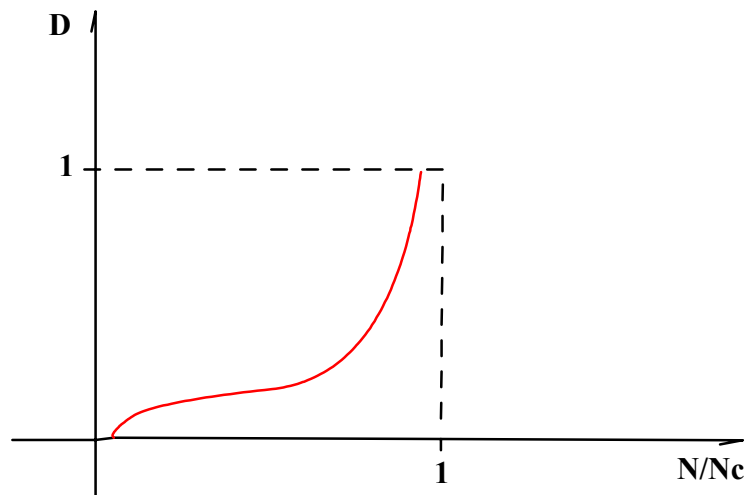


Figura 2.3.1 – Evolução do dano em uma peça de metal submetida a um ensaio de fadiga de baixo ciclo. No ensaio realizado, $N_c=218$ ciclos.

Uma distinção necessita ser feita entre a fadiga de baixo e alto ciclo.

Tipicamente:

$$\frac{\delta \mathbf{D}}{\delta N} = \mathbf{g}(\sigma_m, \sigma_M, \mathbf{D}) \quad (2.3.16)$$

Onde N representa o número de ciclos, σ_m por sua vez, a tensão média, e σ_M , a tensão máxima. No caso de fadiga de baixo ciclo, os incrementos de dano em cada um dos ciclos encontram-se diretamente relacionados às deformações plásticas acumuladas durante o ciclo, enquanto para fadiga de alto ciclo a nucleação das microfissuras originando o dano é associado às concentrações de tensões nas extremidades de faixas isoladas de deslizamento, ocasionando a chamada microplasticidade.

Resultados como o apresentado na figura 2.3.1 sugerem a possibilidade do uso de um pseudo-potencial \mathbf{D}^* em termos de \mathbf{Y} , isto é:

$$\mathbf{D}^*(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) = \frac{S_o}{s_o + 1} \left(\frac{\mathbf{Y}}{S_o} \right)^{s_o + 1} \frac{1}{1 - \mathbf{D}} \quad (2.3.17)$$

de modo que a equação

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial \mathbf{Y}} \quad (\text{vide 2.2.6})$$

é equivalente a:

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{D}^*}{\partial \mathbf{Y}} = \left(\frac{\mathbf{Y}}{S_o} \right)^{s_o} \frac{1}{1 - \mathbf{D}} \quad (2.3.18)$$

onde apenas dois parâmetros do material (S_o e s_o) estão presentes, os quais são possivelmente dependentes da temperatura.

2.3.3 Microdeformações plásticas

O dano sempre está associado com deformações irreversíveis. Portanto, ele pode ser desprezado quando são realizados testes da fadiga no regime elástico. Chamaremos de ϵ^π as

microdeformações plásticas importantes que podem acontecer fora do regime elástico, e \mathbf{P} a variável termodinâmica dual, isto é, a tensão. O potencial termodinâmico para esse caso é dado por \mathbf{W} , onde:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^\pi) \quad (2.3.19)$$

O conjugado de \mathbf{W} , obtido por meio da transformação parcial de Legendre-Fechel em relação a $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ proporciona:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W}^*(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}, \boldsymbol{\varepsilon}^\pi) \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e}. \quad (2.3.20)$$

Por exemplo, se considerarmos um material isotrópico e elástico linear, e $\boldsymbol{\varepsilon}^\pi$ como variável separável, nós poderemos tomar:

$$\mathbf{W}^* = \frac{1}{2} \left[\frac{1 + \nu}{\mathbf{E}} \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^2}{1 - \mathbf{D}} - \frac{\nu}{\mathbf{E}} \frac{(\text{tr} \boldsymbol{\sigma})^2}{1 - \mathbf{D}} \right] + \mathbf{W}_\pi^*(\boldsymbol{\varepsilon}^\pi), \quad (2.3.21)$$

de onde são obtidas as equações de estado:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \frac{\partial \mathbf{W}^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \mathbf{Y} = -\frac{\partial \mathbf{W}^*}{\partial \mathbf{D}}, \quad \mathbf{P} = -\frac{\partial \mathbf{W}_\pi^*}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^\pi}. \quad (2.3.22)$$

Chaboche(1974) propôs as seguintes equações para descrever a evolução das microdeformações plásticas:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^\pi}{dt} = \left[\frac{\Delta \boldsymbol{\sigma}_y}{k(1 - D)} \right]^{\beta-1} \left(\frac{d\boldsymbol{\sigma}_y}{dt} \right) \frac{1}{1 - D}, \quad (2.3.23)$$

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_y = \left[\frac{3}{2} \left(\boldsymbol{\sigma}_{ij}^d - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^d \right) \left(\boldsymbol{\sigma}_{ij}^d - \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^d \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2.3.24)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{ij}^d$ é o valor médio de $\boldsymbol{\sigma}^d$ após um ciclo de carregamento.

Desse modo, temos um modelo de fadiga para um número elevado dos ciclos, o qual fornece uma evolução não-linear do dano. Os coeficientes k e β presentes na equação (2.3.23) caracterizam o atrito interno, e são obtidos a partir da curva de *woehler*, que proporciona o número dos ciclos que

produz o fraturamento de uma peça em função da tensão máxima obtida em um teste combinado de fadiga, tração e compressão.

2.3.4 Acoplamento da plasticidade com dano

Neste estudo utilizaremos a hipótese do material padrão generalizada (isto é, o critério de plasticidade é obtido a partir do potencial de plasticidade). O acoplamento aplica-se particularmente bem no caso do chamado “dano dúctil”, durante a iniciação e crescimento das microcavidades, o qual ocorre frequentemente em testes de fadiga de baixo número de ciclos ($N < 10^4$) realizados sob temperaturas relativamente baixas.

Para o desenvolvimento do modelo, consideraremos as variáveis de estado $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, $\boldsymbol{\varepsilon}^p$, $\boldsymbol{\beta}$ e \mathbf{D} , onde as três últimas são dissipativas.

O potencial de dissipação, considerando-se o critério de plasticidade, é dado por:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) = 0 \quad (2.3.25)$$

com:

$$\mathbf{D}^* = f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) + \mathbf{D}_p^*(\mathbf{Y}, \mathbf{D}) \quad (2.3.26)$$

de onde são obtidas as equações:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{B}}, \quad \frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial \mathbf{D}_p^*}{\partial \mathbf{Y}} \quad (2.3.27)$$

para o critério de plasticidade com encruamento de Mises, nós teremos:

$$f = (\overline{\boldsymbol{\sigma}_y + \mathbf{B}}) + k_o \quad (2.3.28)$$

portanto:

$$\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)}{1 - \mathbf{D}} \frac{\boldsymbol{\sigma}_d}{\boldsymbol{\sigma}_y}, \quad (2.3.29)$$

$$\frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)}{1 - \mathbf{D}} = \left(\frac{2}{3} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p}{dt} \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p}{dt}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.3.30)$$

$$\frac{d\mathbf{D}}{dt} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\partial \mathbf{D}_p^*}{\partial \mathbf{Y}} = \left(\frac{\mathbf{Y}}{\mathbf{S}_o}\right)^{s_o} \frac{\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)}{1 - \mathbf{D}}, \quad (2.3.31)$$

O mutiplicador plástico $d\lambda/dt$ é usualmente determinado pela condição $df/dt = 0$, de modo que:

$$\frac{d\lambda}{dt} = H(f) \frac{\left\langle \frac{d\sigma_y}{dt} \right\rangle (1-D)}{\left(\frac{dB}{d\beta} \right) - K_o \left(\frac{Y}{S_o} \right)^{s_o}}, \quad (2.3.32)$$

Na equação 2.3.32, $\langle d\sigma_y/dt \rangle$ denota a parte positiva de $d\sigma_y/dt$, $H(f)=0$, se $f<0$, e $H(f)=1$, se $f=0$. A derivada $dB/d\beta$ caracteriza o encruamento não-linear.

Com o desenvolvimento das equações 2.3.29 a 2.3.31, e com o complemento dado pela equação 2.3.32, o modelo de acoplamento de dano com plasticidade encontra-se devidamente definido.

Bibliografia

MAUGIN, G.A. (1992). *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*, Cambridge University Press, USA.

LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.-L. (1990). *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, USA.

LEMAITRE, J.(1996). *A course on Damage Mechanics*, Spriger-Verlag, Germany.