

UM BREVE ESTUDO SOBRE AS ESTRUTURAS TENSEGRITY

Telmo Egmar Camilo Deifeld

Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti

Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

tdeifeld@usp.br; pauletti@usp.br

Resumo

Neste trabalho apresenta-se um estudo preliminar do comportamento das estruturas tensegrity. Inicialmente discute-se como o surgimento destas estruturas está ligado à ousadia de artistas que ignoraram alguns dos conceitos técnicos tradicionais. Avalia-se a utilização da regra de Maxwell na análise da estabilidade deste tipo de estrutura. Procura-se mostrar o princípio do comportamento das estruturas tensegrity. Alguns estudos de casos são apresentados. Nos exemplos apresentados inspecionam-se as potencialidades de um elemento (cuja característica principal é manter constante a tensão que nele atua) na busca de forma de estruturas retesadas; mostra-se a influência da rigidez geométrica nas estruturas que buscam maximizar o número de elemento tracionados; e estuda-se a estabilidade de algumas formas básicas de estruturas tensegrity.

Abstract

This work presents some preliminary results of a research on the behavior of tensegrity systems. Initially, it is discussed how the appearance of this type of structures relates to the non-conformity of some artists to traditional technical rules. The behavior of some basic tensegrity modules is then inspected, including the effects of the geometric stiffness on their stability. A constant stress, variable initial length element is also briefly described, and is afterwards employed to find the equilibrium configuration of some simple tensegrity structures.

Palavras-chave

1. Sistemas tensegrity; 2. Estados de auto-tensão; 3. Mecanismos infinitesimais; 4. Estruturas leves.

1 Introdução

Em 1890, no artigo “*On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames*”¹, J. Clerk Maxwell analisou o comportamento de estruturas compostas por barras retas conectadas em suas extremidades por nós articulados, estabelecendo a relação que ficou conhecida como “Regra de Maxwell”. Por esta regra, uma estrutura espacial reticulada e articulada requer, para ser rígida, *em geral*, um número de barras igual a $3j - 6$ (j é o número de nós).

Analisando treliças espaciais pela regra de Maxwell – mesmo sem citá-las como tal² - Timoshenko (1947) afirma que este número de barras “**é sempre necessário**, e quando dispostas convenientemente, são suficientes para a ligação rígida entre si e à base dos j nós no espaço”. Treliças que obedecem a esta regra são estaticamente determinadas, e as exceções se devem aos casos em que o determinante das equações de equilíbrio se anula. Nestes casos excepcionais, denominados de *formas críticas*, as equações de equilíbrio não dão uma solução definida para as forças axiais. Esta circunstância, segundo Timoshenko, “*será sempre uma indicação de que a treliça não é rígida e, portanto, desaconselhável para fins estruturais.*”

A treliça em que o número de barras b é maior do que o dado pela regra de Maxwell é considerada *estaticamente indeterminada* (ou *hiperestática*), e neste caso as deformações elásticas das barras devem ser consideradas para que as forças internas possam ser calculadas. Caso contrário, se o número de barras for menor do que o determinado pela regra de Maxwell (estrutura hipostática), “*a estrutura não é rígida e desmoronará, provavelmente, sob a ação de cargas aplicadas exteriormente*”, afirmou Timoshenko.

Estas considerações clássicas sobre a estabilidade das estruturas reticuladas por muito tempo limitaram as investigações de estruturas classificadas como formas hipostáticas ou críticas. No entanto, livres da influência dos textos de engenharia e das responsabilidades técnicas, durante a década de 1960, alguns artistas plásticos construíram esculturas usando cabos e barras, com formas que não obedeciam à regra de Maxwell. Ou seja, verificou-se empiricamente que estruturas espaciais

¹ J. C Maxwell, Phil. pg. 27, 294 (1864): (paper XXVI in Collected papers, Cambridge 1890)

² Timoshenko chega a relação de Maxwell considerando o teorema geral da estereometria e o caso particular de um poliedro fechado com as faces triangulares, ou divididas em triângulos. Este teorema foi enunciado por Euler e reza que um poliedro qualquer tem o número de arestas determinado pela expressão $b = j + (f - 2)$, onde j é o número de vértices e f o número de faces. Para o caso particular de poliedro citado acima tem-se que o número de barras é $b = \frac{3}{2}f$. Eliminando-se f entre as duas equações, obtêm-se a expressão da regra de Maxwell.

reticuladas e articuladas poderiam ter um número de barras menor do que o necessário para satisfazer a regra de Maxwell, sem contudo desenvolverem mecanismos, como a tradição usava supor. Dentre estas estruturas, pode-se citar o “*Monumento à Forma Fútil*” (Figura 1) e a “*Needle Tower*” (Figura 2) A primeira foi construída próximo a Rambouillet, na França (Emmerich, 1966) e a segunda foi uma torre construída, em Nova Iorque, por Kenneth Snelson no ano de 1948.

Na verdade Maxwell antecipou casos especiais desta classe, estados em que a rigidez “*será de baixa ordem*”. De fato, as condições em que ocorrem os casos excepcionais de Maxwell também permitem um estado de auto-tensão da estrutura. Mais recentemente, demonstrou-se como a álgebra linear permite a obtenção do número “inicial” de modos de rigidez de baixa ordem da estrutura, em termos do número de barras e nós, e independentemente do estado de auto-tensão. A auto-tensão tem o efeito de proporcionar rigidez de primeira ordem para a estrutura. Segundo Calladine (1978a) alguns experimentos mostram que, aparentemente, um único estado de auto-tensão pode dar rigidez a um grande número de modos de rigidez de baixa ordem.

Uma característica dos sistemas auto-tensionados a ser destacada é o fato de sua rigidez ser, basicamente, dependente do estado de tensão a que está submetida. Ou seja, a rigidez geométrica (dada pela segunda parcela da equação (1)) tem uma influência considerável na rigidez global da estrutura.

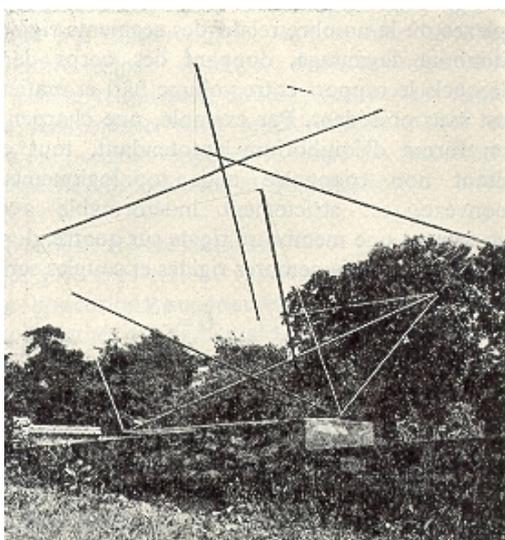
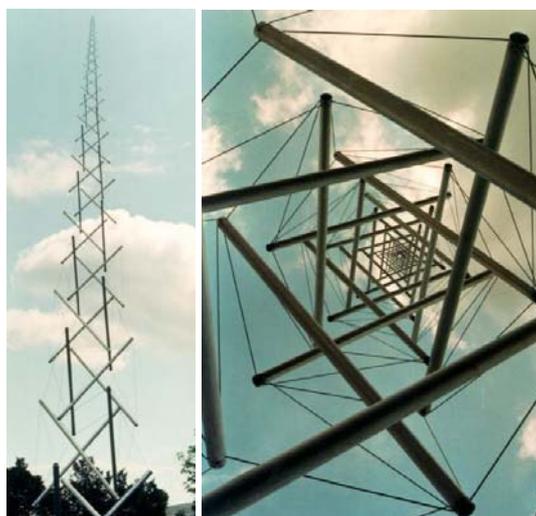


Figura 1 - *Monument à la Forme Fútil*
(Emmerich, 1966)



(a)

(b)

Figura 2 - *Needle Tower*

(<http://www.frontiernet.net/~imaging/tenseg2.html>)

2 Origem das estruturas tensegrity

O termo “tensegrity” é uma contração de “*tensional integrity*” e foi criado por Richard Buckminster Fuller para descrever o “*princípio estrutural em que a forma da estrutura é garantida pela interação entre uma rede contínua de cabos tracionados e um conjunto de elementos comprimidos*”. A expressão de Fuller surgiu em virtude da escultura de Snelson mostrada na Figura 2. Foi esta uma das obras que mais divulgou o princípio de funcionamento das assim chamadas estruturas tensegrity.

Inicialmente restringiu-se a definição de estruturas tensegrity às redes de cabos retesadas auto-equilibradas, nas quais se incluem barras rígidas comprimidas, isoladas entre si. Posteriormente percebeu-se a necessidade de incluir nesta definição estruturas que podem não ser auto-equilibradas, mas que contemplam o princípio “tensegrity” em si – isto é, que sejam formadas por cabos tracionados e barras comprimidas e isoladas entre si. Um exemplo destas estruturas é o domo de cabos, que precisa de um anel de compressão externo para o equilíbrio de tensões. Motro (1994) define os sistemas tensegrity como “*estruturas espaciais reticuladas compostas por membros retificados, barras e cabos que definem um volume estável no espaço por efeito do equilíbrio entre tração e compressão*”. Em outro trabalho recente (Motro, 2001) o mesmo autor elabora nova definição que busca agrupar todas as tendências: “*um sistema tensegrity é um sistema de um estado retesado estável, que compreende um conjunto descontínuo de componentes comprimidos dentro de uma série de elementos tracionados*”.

É difícil afirmar quando as estruturas tensegrity surgiram e quem teria sido o precursor deste sistema estrutural. Pode-se citar alguns fatos e/ou pessoas que contribuíram grandemente para o desenvolvimento inicial e divulgação destas estruturas, mas nenhuma delas pode ser apontada, de forma convicta, como o marco inicial. Richard Buckminster Fuller foi um dos grandes mentores deste sistema estrutural. Ele imaginou que as estruturas deveriam fazer maior uso das forças normais de tração. Fuller fez várias obras que se destacam pelo grande número de elementos tracionadas, das quais a mais conhecida é o Domo Geodésico. Esta criação levou Fuller, em 1948, ao Black Mountain College, onde montou, junto com seus alunos, o primeiro protótipo de um domo geodésico. A experiência durou pouco, pois, devido às dificuldades de montagem, o domo ficou em pé apenas por alguns minutos.

Nesta turma estava também Kenneth Snelson, aluno que tinha grande habilidade manual e que desenvolveu um estudo de modelos para esculturas. Snelson interessou-se pelo conceito transmitido

por Füller (de que as estruturas deveriam trabalhar mais à tração). Mais tarde, em 1968, ele criou uma escultura em forma de torre (Figura 2), a qual chamou inicialmente de “*Floating Compression*” (compressão flutuante). Ele a montou usando barras comprimidas isoladas umas das outras e interligadas por cabos tracionados. Esta obra ficou posteriormente conhecida como “*Needle Tower*”.

Embora Snelson tenha afirmado que o princípio que mantinha algumas de suas esculturas em pé não tivesse aplicação prática, e que uma obra tão qualificada para exemplificar o comportamento das estruturas tensegrity tenha sido relacionada com a futilidade, as estruturas tensegrity têm se mostrado como um sistema estrutural confiável e vem despertando o interesse de pesquisadores e projetistas [(Calladine, 1978b), (Pellegrino et. all, 1986), (Pellegrino, 1990), (Campbell et. all, 1994), (Murakami, 2001), (Nishimura, 2001)].

Uma das obras mais relevantes já construídas com base nos sistemas tensegrity é o domo de cabos que constitui a cobertura do ginásio sportivo Georgia Dome, em Atlanta, provavelmente a maior estrutura tensegrity construída até o momento (Levy, 1994). A Figura 3 apresenta um esquema simplificado do funcionamento da estrutura. Se a planta do estádio tivesse um formato circular, a barra central do esquema desta figura seria comum a todas as vigas em cabo-treliça. No entanto, como planta do estádio tem um formato oval, a barra central mencionada foi substituída por uma viga treliçada. A Figura 3b mostra a substituição dos apoios externos e dos cabos horizontais internos da Figura 3a por um anel externo de compressão e por anéis internos de tração, respectivamente.

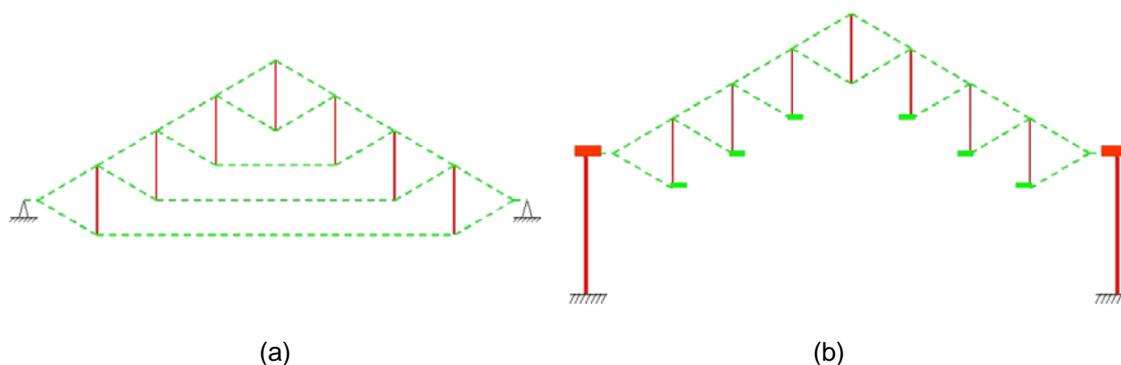


Figura 3 – Esquema de funcionamento da estrutura da cobertura do Georgia Dome: (a) viga em cabo-treliça; (b) anéis de compressão (externo) e de tração (internos)

A Figura 4 mostra fotos da montagem da cobertura do Georgia Dome que possibilitam a visualização dos anéis internos de tração, o anel externo de compressão e as barras verticais que separam os cabos, como lustrado na Figura 3.



Figura 4 – Fotos da montagem da estrutura da cobertura do Georgia Dome (Terry, 1994)

3 Estudo de casos

Para entender em maior profundidade o comportamento das estruturas tensegrity, alguns exemplos elementares deste tipo de sistema estrutural foram simulados numericamente, empregando o código PEFSYS (Pimenta, 1998) – um programa de elementos finitos para análises não-lineares, estáticas e dinâmicas, de estruturas. Algumas das figuras apresentadas foram geradas com o auxílio do pós-processador do programa computacional ANSYS.

A modelagem dos cabos e das barras das estruturas estudadas foi realizada usando-se um elemento de treliça geometricamente exato adaptado de (Pauletti, 1995). O procedimento de análise estática não linear adotado foi o método de Newton exato, o qual requer a montagem da matriz de rigidez tangente da estrutura, obtida através da soma das contribuições de cada elemento da estrutura. Para os elementos empregados, a matriz de rigidez tangente é dada por

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l_i} \begin{bmatrix} \mathbf{v}\mathbf{v}^T & -\mathbf{v}\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v}\mathbf{v}^T & \mathbf{v}\mathbf{v}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T & -(\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \\ -(\mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) & \mathbf{I} - \mathbf{v}\mathbf{v}^T \end{bmatrix} \quad (1)$$

onde l é o comprimento do elemento na configuração corrente, l_i o comprimento indeformado, N a força normal atuando no elemento, E o módulo de elasticidade longitudinal do material, A a seção transversal da barra, e \mathbf{v} o vetor unitário na direção do eixo do elemento considerado. Obviamente, no caso dos cabos tanto a força axial no elemento como a sua rigidez se anulam, quando a distância entre as extremidades do elemento (l) for menor que seu comprimento indeformado (l_i).

Uma especialização do elemento de treliça foi empregada para a aplicação do retesamento dos cabos. Trata-se de um elemento cuja principal característica é manter constante a tensão que nele atua. Dessa maneira, como a força elástica no elemento não é função deslocamentos, sua matriz de rigidez tangente corresponde somente à parcela geométrica, ou seja, a segunda parcela dada pela equação (1). Um elemento semelhante denominado de ‘*variable initial length element*’ (VIL) foi apresentado por Meek (1971), do qual adota-se a denominação “VIL”.

O elemento VIL também pode ser empregado na busca da forma de estruturas reticuladas formadas por cabos e barras. Para tanto é preciso especificar a tensão (de tração ou compressão) que deve agir sobre um determinado elemento da estrutura na sua configuração de equilíbrio. Partindo-se de uma configuração da estrutura próxima à configuração de equilíbrio desejada, a resolução do sistema de equações que expressa o equilíbrio de forças na estrutura convergirá para a solução correspondente ao equilíbrio da mesma. Todavia, se a configuração inicial não for convenientemente escolhida e as tensões especificadas não forem equilibráveis, não haverá convergência e será impossível encontrar a forma final da estrutura. Motro (1994) descreve outros métodos geométricos, analíticos e numéricos de busca de forma de estruturas tensegrity.

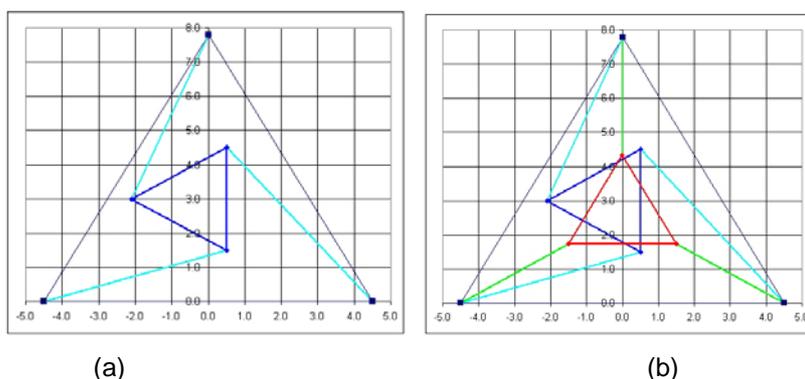


Figura 5 – Exemplo de aplicação do elemento VIL na busca de forma

Um primeiro exemplo visa mostrar, de forma simples, o funcionamento do elemento VIL na busca de forma de estruturas retesadas reticuladas formadas por cabos e barras. Elaborou-se um problema estrutural cuja configuração de equilíbrio é conhecida. Busca-se chegar até ela a partir de uma configuração genérica. O problema proposto constitui-se de um arranjo de três elementos de cabo, de comprimentos iguais, com tensões iniciais iguais, formando um triângulo equilátero. Os nós do triângulo de cabos são ligados a nós externos por elementos VIL. Os nós externos são dispostos de tal forma que constituem outro triângulo equilátero cujas faces não são paralelas às faces do triângulo formado pelas cabos (Figura 5a). Especificando uma única tensão de tração para os elementos VIL, a

configuração de equilíbrio corresponde à posição concêntrica dos dois triângulos em que os elementos VIL tenham o menor comprimento final (Figura 5b).

O segundo exemplo apresentado é o de uma viga formada por cabos e barra. Os cabos têm diâmetro $\phi = 0.01m$ e módulo de elasticidade $E = 2,1.10^{11} \text{ N/m}^2$, as barras têm área $A = 4cm^2$ e módulo de elasticidade igual ao dos cabos. Os nós das extremidades da viga são indeslocáveis. A Figura 6a ilustra o problema. A Tabela 1 mostra as coordenadas dos nós da estrutura na configuração inicial.

Tabela 1 – Coordenadas iniciais dos nós do primeiro exemplo

Nós	X	Y	Z
1	0.000	0.000	0.000
2	1.000	-1.000	0.000
3	2.000	-2.000	0.000
4	6.000	-2.000	0.000
5	8.000	0.000	0.000
6	1.000	1.000	0.000
7	2.000	2.000	0.000
8	6.000	2.000	0.000

A Figura 6b mostra a deformada da estrutura quando é aplicada uma força de retesamento de 50 KN por cada um dos elementos VIL.

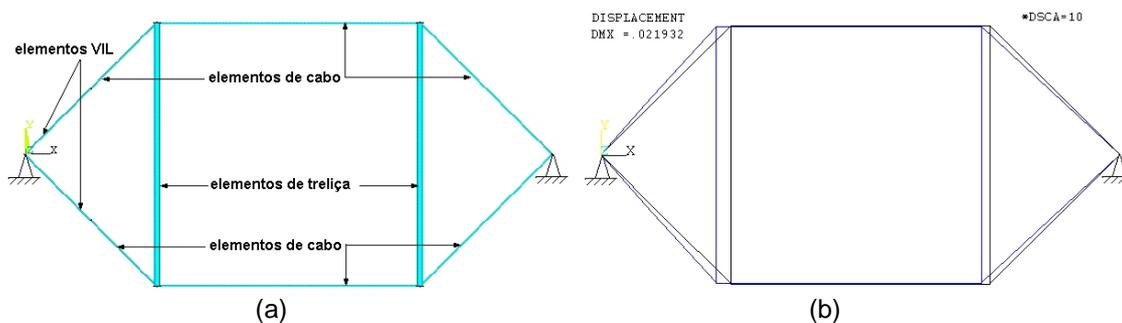


Figura 6 - Configuração inicial do exemplo de treliça com elementos de cabo, de treliça e elementos VIL

Depois de aplicado o retesamento os elementos VIL tem o mesmo comportamento de um elemento de treliça e, neste caso, com todas as propriedades dos elementos de cabos. Vários carregamentos foram testados. Os carregamentos e as suas correspondentes deformadas estão ilustrados na Figura 7.

Observa-se, no primeiro caso de carregamento, quando são aplicadas duas cargas verticais distribuídas de forma simétrica na estrutura, que a estrutura deforma-se de forma assimétrica (Obs.: em todos os casos de carregamentos deste exemplo, os deslocamentos foram considerados a partir da configuração obtida após o retesamento da estrutura.). Isto se a assimetria da aplicação do retesamento.

No entanto, é de se ressaltar a diferença entre relativa entre os deslocamentos que ocorreram no primeiro e segundo casos de carregamento. Neste último caso o carregamento foi aplicado em apenas um nó da estrutura. Observa-se deslocamentos muito maiores quando o carregamento é distribuído de forma assimétrica.

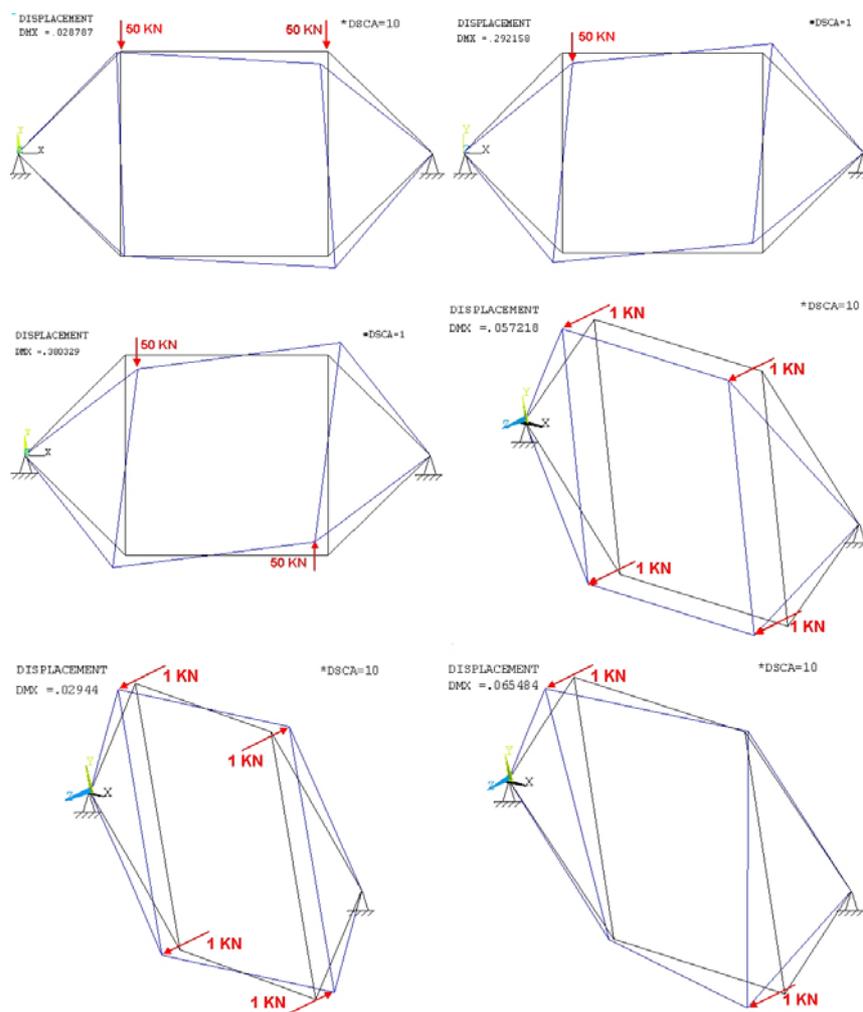


Figura 7 – Carregamentos aplicados na estrutura da Figura 6(a) e as deformadas correspondentes.

Outra observação importante é quanto aos deslocamentos relativos entre o segundo e ao terceiro casos de carregamento. O terceiro caso é obtido aplicando-se, além do carregamento do segundo caso, uma força no nó 8 cujo sentido é oposto ao da força aplicada no nó 3 no segundo caso. Esta força aumenta a distorção sofrida pela viga no caso do segundo carregamento. É interessante chamar a atenção ao ganho de rigidez geométrica obtido pela estrutura com o aumento da intensidade das forças internas que nela atuam. Isto pode ser observado comparando-se os valores dos deslocamentos correspondentes aos segundo e terceiro casos de carregamentos.

Os demais casos de carregamento solicitam transversalmente a estrutura. Observa-se que os carregamentos aplicados nestes casos apresentam sempre uma distribuição simétrica. Para um carregamento transversal, composto por forças em uma única direção e de mesmo sentido, aplicado apenas nos nós superiores (ou apenas nos nós inferiores) da estrutura, a posição de equilíbrio corresponde a um giro da estrutura de tal forma que esta esteja no plano definido pelas forças aplicadas.

Nos demais exemplos é verificada a estabilidade de formas de estruturas tensegrity básicas. As formas são testadas aplicando-se uma tensão inicial nos cabos e verificando os valores dos deslocamentos sofridos pela estrutura. A Figura 8 mostra duas formas clássicas de estruturas tensegrity básicas: um prisma triangular formado por cabos, com barras nas diagonais das faces laterais; e um cubo, também formado por cabos, com barras em todas as diagonais.

As formas geométricas apresentadas na Figura 9 foram sugeridas pelos autores e também, a exemplo das primeiras, se mostraram estáveis. Convém ressaltar que as formas geométricas da Figura 9 foram elaboradas apenas para estudo comparativo entre formas. Nas estruturas classificadas com tensegrity as barras são isoladas entre si. Nas estruturas desta figura as barras transpassam umas as outras em um único ponto. Estruturas com formas aproximadas a estas, no entanto, são exequíveis.

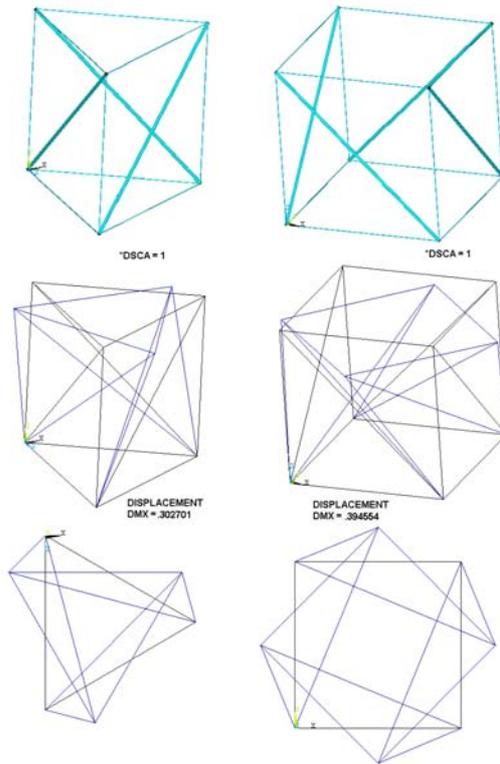


Figura 8 – Formas clássicas de estruturas tensegrity

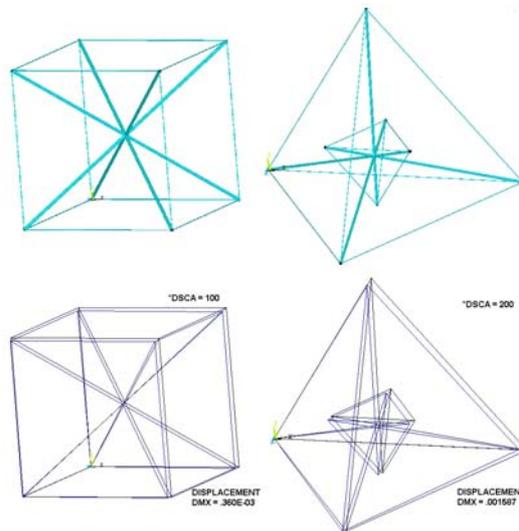


Figura 9 – Formas geométricas com barras cruzadas

Na Figura 10 mostra-se uma estrutura tensegrity inicialmente apresentada por Calladine (1978a). Apresenta-se nesta figura duas vistas da configuração inicial e as vistas correspondentes na configuração de equilíbrio, depois de aplicada uma única tensão inicial em todos os cabos.

Em todas geometrias testadas e as formas de equilíbrio encontradas correspondem às formas iniciais, a menos de pequenos deslocamentos devido a deformações elásticas dos elementos.

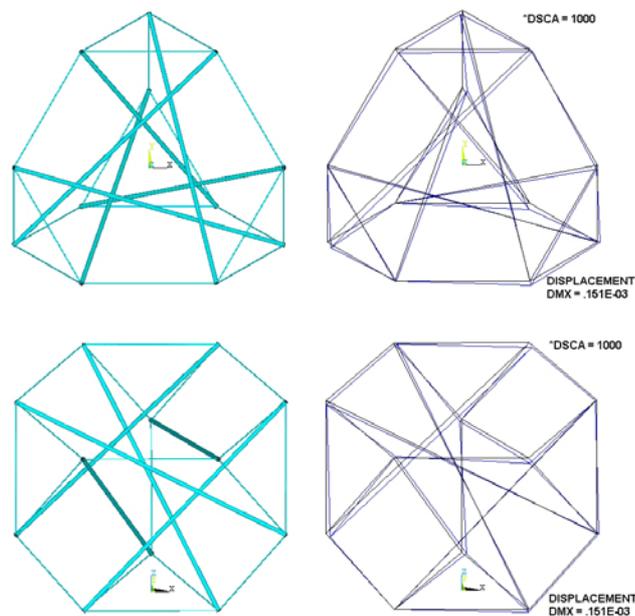


Figura 10 – Octaedro com faces triangulares e hexagonais

4 Considerações finais

Este é um trabalho em fase preliminar, cujos estudos fazem parte do desenvolvimento de uma tese de doutoramento. No entanto, algumas observações podem ser feitas.

O elemento VIL mostrou-se eficiente na busca da forma para o caso estudado. A utilização deste elemento na busca de forma de estruturas mais complexas mostra-se promissora.

O exemplo em que foi apresentada uma viga cabo-treliça mostrou bons resultados. Destaca-se a verificação do ganho de rigidez geométrica com o aumento do carregamento externo.

Sobre as formas geométricas das estruturas tensegrity básicas, observa-se que as que contêm barras internas ao polígono apresentam-se mais rígidas do que as correspondentes formas em que as barras estão todas contidas nos planos das faces externas.

Destaca-se ainda a necessidade, no processo de busca da forma, da verificação do equilíbrio de forças nos nós da configuração desejada.

5 Referências bibliográficas

(Calladine, 1978) Calladine, C. R. "Buckminster Fuller's 'tensegrity' structures and Clerk Maxwell's for the construction of stiff frames". *International Journal of Solids and Structures* V. 14 pp. 161-172. 1978.

(Calladine, 1991) Calladine, C. R. "First infinitesimal mechanisms". *International Journal of Solids and Structures* V. 27 pp. 505-515. 1991.

(Campbell et. all, 1994) Campbell, D. M., Chen, D, Gossen, P. A., Hamilton, K. P., "*Effects of spatial triangulation on the behavior of 'tensegrity' domes*". *Spatial, Lattice and tension structures – proceeding of the IASS-ASCE International Symposium 1994*, pp. 560-562. New York, 1994.

(Emmerich, 1966) Emmerich, D. G., "*Réseaux*", *International Conference on Space Structures*. University of Surrey, pp. 1059-1072, 1966.

(Levy, 1994) Levy, M. P., "*The Georgia Dome and beyond achieving lightweight – longspan structures*". *Spatial, Lattice and tension structures – proceeding of the IASS-ASCE International Symposium 1994*, pp. 560-562. New York, 1994.

(Meek, 1971) Meek, J. L. "*Matrix Structural Analysis*". McGraw-Hill Kogakusha, LTD. Tokyo, 1971.

(Motro, 1994) Motro, R., "*Form finding numerical methods for tensegrity systems*". *Spatial, Lattice and tension structures – proceeding of the IASS-ASCE International Symposium 1994*, pp. 704-713. New York, 1994.

(Murakami, 2001) Murakami, H. "*Static and dynamic analysis tensegrity structures. Part 1. Nonlinear equations of motion*". *International Journal of Solids and Structures* V. 38 pp. 3599-3613. 2001.

(Nishimura, 2001) Nishimura, Y., Murakami, H. "*Initial shape-finding and modal analyses of cyclic frustum tensegrity modules*". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* . V. 190, pp. 5795-5818, 2001.

- (Pauletti,1994) Pauletti, R. M. O. and Pimenta, P. M., "*Formulação de um elemento finito de cabo incorporando o efeito do atrito ('elementos de cabos escorregando')*". Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculos y Diseño en Ingeniería. Vol. 11 (4) , pp. 565-576, 1994.
- (Pellegrino et. all, 1986) Pellegrino, S., Calladine, C. R. "*Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks*". International Journal of Solids and Structures V. 26 pp. 1329-1350. 1990.
- (Pellegrino, 1990) Pellegrino, S. "*Analysis of prestressed mechanisms*". International Journal of Solids and Structures V. 22 pp. 409-428. 1986.
- (Pimenta, 1998) Pimenta, P. M., Maffei, C. E. M., Gonçalves, H. H. S. and Pauletti, R. M. O. , "*A programming system for nonlinear dynamic and static analysis of tall buildings*" Computational Mechanics New Trends and Applications. Barcelona, pp. 1-17. Spain, 1998.
- (Terry, 1994) Terry, W. R.. "*Georgia Dome cable roof construction techniques*". Spatial, Lattice and tension structures – proceeding of the IASS-ASCE International Symposium 1994, pp. 563-572. New York, 1994.
- (Timoshenko, 1947) Timoshenko, S., Young, D. H. "*Teoria das Estruturas*". Trad. A. A. Noronha. Editora Gertum Carneiro S.A.. Rio de Janeiro, 1947.