

# Análise não-linear de estruturas espaciais de cabos e membranas

Paulo M. Pimenta<sup>1</sup> & Ruy M. O. Pauletti<sup>2</sup>

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo

## Abstract

*This work addresses the nonlinear analysis of cable and membrane spatial structures. With the aid of the natural method, a simple and elegant formulation of the static and dynamic analyses of such structures are presented. Some attention is given to the derivation of consistent orthotropic constitutive equations and to the derivation of consistent element tangent stiffness matrices. This formulation is at this time being implemented in the academic programming system PEFSYS [5], which is at development at the Department of Structural and Foundation Engineering of the Escola Politécnica da Universidade de São Paulo .*

**Keywords:** nonlinear analysis, cable structures, membrane structures.

## 1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo rever a teoria geometricamente exata apresentada em [1] para a análise não-linear de treliças espaciais e elaborar uma extensão dos resultados para a análise não-linear de membranas espaciais. Para isso será utilizado o Método Natural de J.H. Argyris, conforme [2], que permite uma generalização intuitiva para o estado plano de tensões que ocorre em membranas espaciais.

## 2. Estruturas de cabos

### 2.1. Elemento de cabo

Nesta seção apresenta-se a formulação geral de uma teoria geometricamente exata para barras de treliças ou elementos de cabos espaciais. Por simplicidade, supor-se-á que os elementos de cabo sejam retos e possuam uma seção transversal constante. Adotar-se-á, desta vez, como grandezas cinemáticas e estáticas básicas, o alongamento quadrático de Green e a sua tensão energeticamente conjugada, conhecida como segunda tensão de Piola-Kirchhoff. Isto é feito para facilitar a extensão para membranas.

---

<sup>1</sup> Professor Titular, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Caixa Postal 61548 - 05424-970 - São Paulo - SP - Brasil, e-mail: ppimenta@usp.br.

<sup>2</sup> Professor Doutor, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Caixa Postal 61548 - 05424-970 - São Paulo - SP - Brasil, e-mail: pauletti@usp.br.

Seja  $\ell^r$  o comprimento do elemento na configuração de referência e  $\ell^c$  o comprimento do mesmo elemento na configuração deformada ou corrente, conforme a figura 1 abaixo. O estiramento do elemento é definido por

$$\lambda = \frac{\ell^c}{\ell^r} \quad (2.1)$$

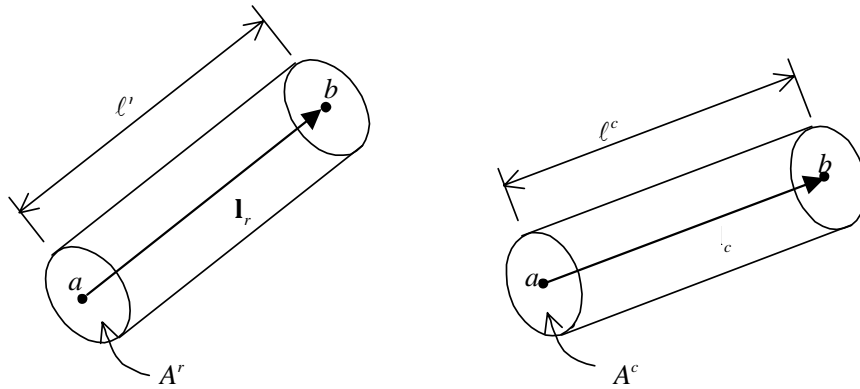
O alongamento quadrático ou de Green de um elemento é dado por

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\lambda^2 - 1) \quad (2.2)$$

Note-se que, por linearização consistente de (2.2), a deformação virtual correspondente é dada por

$$\delta\varepsilon = \lambda^2 \frac{\delta\ell^c}{\ell^c}, \quad (2.3)$$

onde  $\delta\ell^c$  é a variação virtual do comprimento do elemento na configuração corrente.



**Figura 1: elemento de cabo nas configurações de referência e corrente**

Seja  $A^r$  a área da seção transversal na configuração de referência e seja  $V^r = A^r \ell^r$  o volume na mesma configuração. Por segunda tensão de Piola-Kirchhoff atuante no elemento na sua configuração deformada entende-se a tensão  $\sigma$  tal que o trabalho virtual interno seja dado por

$$\delta W_{\text{int}} = V^r \sigma \delta\varepsilon. \quad (2.4)$$

Note-se que

$$\delta W_{\text{int}} = N \delta\ell^c, \quad (2.5)$$

onde  $N$  é a força normal atuante no elemento. Logo, com a ajuda de (2.3), (2.4) e (2.5), a força normal é dada por

$$N = A^r \lambda \sigma. \quad (2.6)$$

A equação constitutiva elástica pode ser expressa por

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, \quad (2.7)$$

onde a função  $\hat{\psi}(\varepsilon)$  é a energia específica de deformação do material. No caso de cabos (2.7) deve-se cuidar para que protensão inicial seja possível e que o elemento não apresente rigidez na compressão. Uma grandeza importante é o módulo tangente de rigidez elástica definido por

$$D = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon}. \quad (2.8)$$

Note-se que, em geral,  $D$  é função de  $\varepsilon$ .

Introduz-se um sistema de coordenadas cartesianas, aqui denominado sistema global de coordenadas, que vale para toda a estrutura. Seja  $\mathbf{x}$  o vetor posição de um ponto no espaço em relação a origem deste sistema e seja  $\mathbf{u}$  o vetor deslocamento do mesmo ponto no espaço. Sejam denotadas por  $a$  e  $b$  as extremidades de um elemento de cabo, conforme a figura 1. Com os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  destas extremidades é possível construir o vetor das coordenadas nodais do elemento na configuração de referência, o vetor das coordenadas nodais do elemento na configuração corrente e o vetor dos deslocamentos nodais, que são dados, respectivamente, por

$$\xi^r = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^r \\ \mathbf{x}_b^r \end{bmatrix}, \quad \xi^c = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^c \\ \mathbf{x}_b^c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \xi^c - \xi^r = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Os vetores que unem a extremidade  $a$  com a extremidade  $b$  nas configurações de referência e corrente, com origem na extremidade  $a$ , são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{l}^r = \mathbf{L}\xi^r \quad \text{e} \quad \mathbf{l}^c = \mathbf{L}\xi^c, \quad (2.10)$$

onde

$$\mathbf{L} = [-\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3]. \quad (2.11)$$

Em (2.11), e no restante do texto,  $\mathbf{I}_n$  representa a matriz identidade de ordem  $n$ . Os comprimentos do elemento nas configurações de referência e corrente são dados, respectivamente, por

$$\ell^r = \sqrt{\mathbf{l}^{rT}\mathbf{l}^r} \quad \text{e} \quad \ell^c = \sqrt{\mathbf{l}^{cT}\mathbf{l}^c}. \quad (2.12)$$

O alongamento quadrático pode ser, então, escrito como função dos deslocamentos nodais, de acordo com

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\xi^r + \mathbf{p})^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} (\xi^r + \mathbf{p})}{\xi^{rT} \mathbf{L}^T \mathbf{L} \xi^r} - 1 \right]. \quad (2.13)$$

O vetor dos esforços nodais internos do elemento, aqui denotado por  $\mathbf{P}_{\text{int}}$ , é definido, conforme os Trabalhos Virtuais, de tal forma que

$$\delta W_{\text{int}} = \mathbf{P}_{\text{int}} \delta \mathbf{p}. \quad (2.14)$$

Mas, pela regra da cadeia, tem-se

$$\delta \varepsilon = \mathbf{b}^T \delta \mathbf{p}, \quad (2.15)$$

onde, por diferenciação de (2.13), se introduziu o seguinte vetor

$$\mathbf{b} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = \ell^{r-2} \mathbf{L}^T \mathbf{l}^c. \quad (2.16)$$

Com (2.15) em (2.4), e esta em (2.14), chega-se a

$$\mathbf{P}_{\text{int}} = V^r \sigma \mathbf{b}. \quad (2.17)$$

A matriz interna de rigidez tangente de um elemento tem a seguinte definição

$$\mathbf{k}_{\text{int}} = \frac{\partial \mathbf{P}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (2.18)$$

a qual, aplicada em (2.17), fornece

$$\mathbf{k}_{\text{int}} = V^r \mathbf{b} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{p}} \right)^T + V^r \sigma \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (2.19)$$

Note-se que, utilizando-se a regra da cadeia e as equações (2.16) e (2.8), pode-se escrever

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} = D \mathbf{b}, \quad (2.20)$$

e, diferenciando-se (2.16), pode-se definir a seguinte matriz

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{p}} = \ell^{r-2} \mathbf{L}^T \mathbf{L}. \quad (2.21)$$

Introduzindo-se (2.20) e (2.21) em (2.19), tem-se

$$\mathbf{k}_{\text{int}} = V^r (D \mathbf{b} \mathbf{b}^T + \sigma \mathbf{G}). \quad (2.22)$$

A matriz de massa de um elemento reto de cabo é dada por

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} V^r \rho^r \mathbf{I}_6, \quad (2.23)$$

de modo que as forças inerciais do elemento podem ser calculadas por meio de  $\mathbf{m} \ddot{\mathbf{p}}$ . Em (2.23)  $\rho^r$  é a massa específica do cabo na configuração de referência.

## 2.2. Material elástico linear

Um cabo que obedece à seguinte relação constitutiva,

$$\frac{N}{A^r} = E(\lambda - 1), \quad (2.24)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade, é usualmente denominado de elástico linear. Logo, levando em conta a relação (2.6), a sua equação constitutiva é

$$\sigma = E \lambda^{-1} (\lambda - 1), \quad \text{onde } \lambda = \sqrt{1 + 2\varepsilon}. \quad (2.25)$$

Conseqüentemente, tem-se

$$D = \lambda^{-3} E. \quad (2.26)$$

Observe-se que  $D$  não é constante. A energia de deformação específica deste material é dada por

$$\psi = \frac{1}{2} E (\lambda - 1)^2. \quad (2.27)$$

## 2.3. Análise estrutural

De posse de  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  e  $\mathbf{k}_{\text{int}}$  para todos os elementos da estrutura, pode-se calcular de forma usual o vetor dos esforços nodais internos e a matriz de rigidez tangente interna da estrutura por meio de

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\text{int}} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}^T \mathbf{k}_{\text{int}} \mathbf{A}, \quad (2.28)$$

respectivamente, onde  $\mathbf{R}_{\text{int}}$  é o vetor dos esforços internos nodais da estrutura,  $\mathbf{K}_{\text{int}}$  é a matriz interna de rigidez tangente da estrutura e  $\mathbf{A}$  é a matriz de conectividade ou incidência do elemento  $e$ , definida para cada elemento de forma que

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \mathbf{r}, \quad (2.29)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura no sistema global. O vetor dos esforços nodais residuais e a matriz total de rigidez tangente da estrutura são dados por

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{ext}} - \mathbf{R}_{\text{int}} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{int}}, \quad (2.30)$$

respectivamente, onde  $\mathbf{R}_{\text{ext}}$  é o vetor dos esforços nodais externos, aqui supostos, por simplicidade, independentes dos deslocamentos nodais. A análise estática resume-se então em resolver o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \mathbf{o}, \quad (2.31)$$

levando-se em conta as restrições impostas pelos vínculos cinemáticos. (2.31) pode ser resolvida pelo Método de Newton, como esquematizado a seguir,

1. estimativa inicial:  $\mathbf{r}_0$ ,  $k = 0$ ;
2. resolva o sistema linear:  $\mathbf{K}(\mathbf{r}_k)\mathbf{d} = \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_k)$ ;
3.  $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \mathbf{d}$ ;
4. se  $\left\| \frac{\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_{k+1})}{\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}_0)} \right\| < tol$  pare; senão  $k \leftarrow k + 1$  e volte para o passo 2.

(2.32)

A matriz total de massa da estrutura é dada por

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}^T \mathbf{m} \mathbf{A}, \quad (2.33)$$

de modo que as equações diferenciais do movimento da estrutura podem ser expressas por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}. \quad (2.34)$$

A análise dinâmica resume-se então em integrá-las no tempo, considerando-se as condições de contorno cinemáticas.

### 3. Estruturas de membranas espaciais

#### 3.1. Elemento de triangular de membrana

Sejam  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  os lados de um elemento triangular de membrana sob deformação constante, respectivamente opostos aos vértices  $a, b$  e  $c$ , conforme a figura 2 abaixo. Sejam  $\ell_\alpha^r, \ell_\beta^r$  e  $\ell_\gamma^r$  os comprimentos destes lados na configuração de referência e  $\ell_\alpha^c, \ell_\beta^c$  e  $\ell_\gamma^c$  os comprimentos destes lados na configuração corrente.

Os estiramentos dos lados  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  do elemento são dados respectivamente por

$$\lambda_\alpha = \frac{\ell_\alpha^c}{\ell_\alpha^r}, \quad \lambda_\beta = \frac{\ell_\beta^c}{\ell_\beta^r} \quad \text{e} \quad \lambda_\gamma = \frac{\ell_\gamma^c}{\ell_\gamma^r}. \quad (3.1)$$

Os alongamentos quadráticos destes lados, por sua vez, são dados por

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha^2 - 1), \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{2}(\lambda_\beta^2 - 1) \quad \text{e} \quad \varepsilon_\gamma = \frac{1}{2}(\lambda_\gamma^2 - 1). \quad (3.2)$$

Com eles pode-se então construir o vetor das deformações naturais abaixo

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \begin{bmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \varepsilon_\beta \\ \varepsilon_\gamma \end{bmatrix}. \quad (3.3)$$

Note-se que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (3.4)$$

onde

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \sqrt{2}E_{12} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

é um vetor que reúne as componentes do tensor das deformações de Green em um sistema de cartesiano local  $(x_i, i=1,2)$  colocado no plano do elemento na configuração de referência, componentes estas indicadas em (3.5) por  $E_{ij}, i, j=1,2$ , e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{\alpha 1}^2 & c_{\alpha 2}^2 & \sqrt{2}c_{\alpha 1}c_{\alpha 2} \\ c_{\beta 1}^2 & c_{\beta 2}^2 & \sqrt{2}c_{\beta 1}c_{\beta 2} \\ c_{\gamma 1}^2 & c_{\gamma 2}^2 & \sqrt{2}c_{\gamma 1}c_{\gamma 2} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

é uma matriz que reúne os co-senos dos ângulos entre os lados  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  e os eixos  $x_i$ , indicados em (3.6) por  $c_{\alpha i}, c_{\beta i}$  e  $c_{\gamma i}, i=1,2$ . É interessante a seguinte propriedade

$$\mathbf{C}\mathbf{C}^T = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cos^2 \gamma^r & \cos^2 \beta^r \\ \cos^2 \gamma^r & 1 & \cos^2 \alpha^r \\ \cos^2 \beta^r & \cos^2 \alpha^r & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

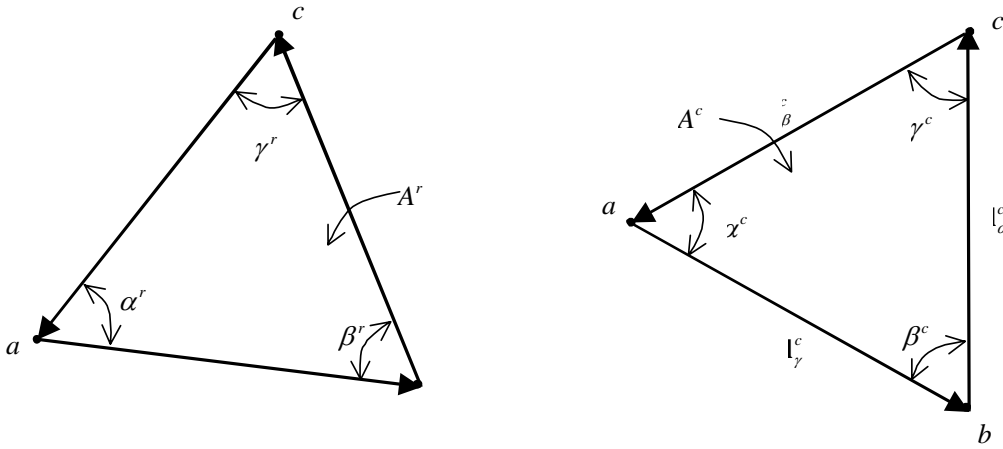
onde  $\alpha^r, \beta^r$  e  $\gamma^r$  são os ângulos dos vértices  $a, b$  e  $c$  na configuração de referência. Observe-se que a matriz  $\mathbf{A}$  não depende do sistema cartesiano local. De (3.7), tem-se

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1}. \quad (3.8)$$

Portanto

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_n. \quad (3.9)$$

As componentes do vetor  $\boldsymbol{\varepsilon}$  são aqui indicadas por  $\varepsilon_i, i=1,2,3$ .



**Figura 2: elemento de membrana nas configurações de referência e corrente**

O vetor das componentes do segundo tensor de Piola-Kirchhoff no sistema cartesiano local acima definido é aqui construído da seguinte forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ \sqrt{2}S_{12} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Seja  $A^r$  a área do elemento triangular na configuração de referência, conforme a figura 2. Seja  $V^r = t^r A^r$  o volume do elemento nesta mesma configuração, onde  $t^r$  é a espessura. O trabalho virtual interno de um elemento é dado então por

$$\delta W_{\text{int}} = V^r \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (3.11)$$

Já o vetor das tensões naturais energeticamente conjugadas com as deformações naturais é denotado por  $\boldsymbol{\sigma}_n$  e definido de modo que o trabalho virtual interno do elemento seja dado por

$$\delta W_{\text{int}} = V^r \boldsymbol{\sigma}_n^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}_n. \quad (3.12)$$

Logo, de (3.11) e (3.12), tem-se

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^T \boldsymbol{\sigma}_n \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \boldsymbol{\sigma}. \quad (3.13)$$

As componentes do vetor das tensões naturais são denotadas por  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$  e  $\sigma_\gamma$ .

A equação constitutiva elástica pode ser expressa pela função energia de deformação específica  $\hat{\psi}(\boldsymbol{\varepsilon})$  tal que

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (3.14)$$

A equação (3.14) deve cuidar para que seja possível uma protensão inicial e que o enrugamento no encurtamento em uma direção esteja adequadamente descrito. A consideração da ortotropia é fundamental [3], [4]. Uma grandeza importante é a matriz dos módulos tangentes de rigidez elástica definida por

$$\mathbf{D} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}. \quad (3.15)$$

Note-se que, em geral,  $\mathbf{D}$  é uma função de  $\boldsymbol{\varepsilon}$ .

Seja novamente o sistema global de coordenadas da seção anterior. Com os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  dos vértices  $a, b$  e  $c$  do triângulo é possível construir o vetor das coordenadas nodais do elemento na configuração de referência, o vetor das coordenadas nodais na configuração corrente e o vetor dos deslocamentos nodais dados, respectivamente, por

$$\boldsymbol{\xi}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^r \\ \mathbf{x}_b^r \\ \mathbf{x}_c^r \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^c = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a^c \\ \mathbf{x}_b^c \\ \mathbf{x}_c^c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \boldsymbol{\xi}^c - \boldsymbol{\xi}^r = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_c \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Os vetores dos lados dos triângulos nas configurações de referência e corrente são dados, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_\alpha^r &= \mathbf{L}_\alpha \boldsymbol{\xi}^r, & \mathbf{l}_\beta^r &= \mathbf{L}_\beta \boldsymbol{\xi}^r, & \mathbf{l}_\gamma^r &= \mathbf{L}_\gamma \boldsymbol{\xi}^r \quad \text{e} \\ \mathbf{l}_\alpha^c &= \mathbf{L}_\alpha \boldsymbol{\xi}^c, & \mathbf{l}_\beta^c &= \mathbf{L}_\beta \boldsymbol{\xi}^c, & \mathbf{l}_\gamma^c &= \mathbf{L}_\gamma \boldsymbol{\xi}^c. \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde

$$\mathbf{L}_\alpha = [-\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{O}_3], \quad \mathbf{L}_\beta = [\mathbf{O}_3 \quad -\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3] \quad \text{e} \quad \mathbf{L}_\gamma = [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{O}_3 \quad -\mathbf{I}_3]. \quad (3.18)$$

Os comprimentos do lado  $\alpha$  do triângulo nas configurações de referência e corrente são dados, respectivamente, por

$$\ell_\alpha^r = \sqrt{\mathbf{l}_\alpha^{rT} \mathbf{l}_\alpha^r} \quad \text{e} \quad \ell_\alpha^c = \sqrt{\mathbf{l}_\alpha^{cT} \mathbf{l}_\alpha^c}, \quad (3.19)$$

valendo expressões análogas para os demais lados. O alongamento quadrático do lado  $\alpha$  do triângulo pode ser, então, escrito como função dos deslocamentos nodais, de acordo com

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\boldsymbol{\xi}^r + \mathbf{p})^T \mathbf{L}_\alpha^T \mathbf{L}_\alpha (\boldsymbol{\xi}^r + \mathbf{p})}{\boldsymbol{\xi}^{rT} \mathbf{L}_\alpha^T \mathbf{L}_\alpha \boldsymbol{\xi}^r} - 1 \right], \quad (3.20)$$

valendo expressões análogas para os demais lados.

O vetor dos esforços nodais internos do elemento, aqui denotado por  $\mathbf{P}_{\text{int}}$ , é definido, conforme os Trabalhos Virtuais, de tal forma que

$$\delta W_{\text{int}} = \mathbf{P}_{\text{int}} \delta \mathbf{p}. \quad (3.21)$$

Mas, pela regra da cadeia, tem-se

$$\delta \varepsilon_\alpha = \mathbf{b}_\alpha^T \delta \mathbf{p}, \quad (3.22)$$

onde, por diferenciação de (3.20), se introduziu o seguinte vetor

$$\mathbf{b}_\alpha = \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \ell_\alpha^{r-2} \mathbf{L}_\alpha^T \mathbf{l}_\alpha^c. \quad (3.23)$$

Para os demais lados valem expressões análogas a (3.23). Com (3.23) e (3.22), chega-se a

$$\delta \varepsilon = \mathbf{B}_n \delta \mathbf{p}, \quad (3.24)$$

onde

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_\alpha^T \\ \mathbf{b}_\beta^T \\ \mathbf{b}_\gamma^T \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Introduzindo-se (3.24) em (3.12), e comparando-se com (3.21), obtém-se

$$\mathbf{P}_{\text{int}} = V^r \mathbf{B}_n^T \boldsymbol{\sigma}_n. \quad (3.26)$$

A matriz interna de rigidez tangente de um elemento tem a seguinte definição

$$\mathbf{k}_{\text{int}} = \frac{\partial \mathbf{P}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (3.27)$$

a qual, aplicada em (3.26), fornece

$$\mathbf{k}_{\text{int}} = V^r \mathbf{B}_n^T \left( \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_n}{\partial \mathbf{p}} \right) + V^r \left( \sigma_\alpha \frac{\partial \mathbf{b}_\alpha}{\partial \mathbf{p}} + \sigma_\beta \frac{\partial \mathbf{b}_\beta}{\partial \mathbf{p}} + \sigma_\gamma \frac{\partial \mathbf{b}_\gamma}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (3.28)$$

Utilizando-se a regra da cadeia, pode-se escrever

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_n}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_n}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{D}_n \mathbf{B}_n, \quad (3.29)$$

onde

$$\mathbf{D}_n = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_n}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n}. \quad (3.30)$$

é a matriz dos módulos naturais de rigidez tangente. Diferenciando-se (3.23), pode-se definir a seguinte matriz

$$\mathbf{G}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{b}_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = \ell_\alpha^{r-2} \mathbf{L}_\alpha^T \mathbf{L}_\alpha, \quad (3.31)$$

valendo expressões análogas para os demais lados. Assim, tem-se

$$\mathbf{k}_{\text{int}} = V^r \left( \mathbf{B}_n^T \mathbf{D}_n \mathbf{B}_n + \sigma_\alpha \mathbf{G}_\alpha + \sigma_\beta \mathbf{G}_\beta + \sigma_\gamma \mathbf{G}_\gamma \right). \quad (3.32)$$

Pela regra da cadeia e com a ajuda de (3.9) e (3.13), tem-se também que

$$\mathbf{D}_n = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_n}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_n} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{D} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1}. \quad (3.33)$$

Logo, outra expressão para (3.32) é

$$\mathbf{k}_{\text{int}} = V^r \left( \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \sigma_\alpha \mathbf{G}_\alpha + \sigma_\beta \mathbf{G}_\beta + \sigma_\gamma \mathbf{G}_\gamma \right), \quad (3.34)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_n. \quad (3.35)$$



A matriz de massa de um elemento reto de cabo é dada por

$$\mathbf{m} = \frac{1}{3} V^r \rho^r \mathbf{I}_9, \quad (3.36)$$

de modo que as forças inerciais do elemento podem ser calculadas por meio de  $\mathbf{m}\ddot{\mathbf{p}}$ . Em (3.36)  $\rho^r$  é a massa específica da membrana na configuração de referência.

### 3.2. Materiais elásticos isotrópicos

Para materiais isotrópicos a energia de deformação específica assume a seguinte forma geral

$$\psi = \hat{\psi}(I_1, I_2), \quad (3.37)$$

onde

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad \text{e} \quad I_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \quad (3.38)$$

são invariantes, não dependendo do sistema local onde as componentes do tensor de Green são determinadas. Assim as tensões são dadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \varepsilon_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \varepsilon_2 \\ \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

A matriz dos módulos tangentes de rigidez elástica é dada por (3.15). Seus elementos são

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{\partial \psi}{\partial I_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_2} \varepsilon_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2^2} \varepsilon_1^2, \\ D_{12} = D_{21} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_2} I_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2^2} \varepsilon_1 \varepsilon_2, \\ D_{22} &= \frac{\partial \psi}{\partial I_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_2} \varepsilon_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2^2} \varepsilon_2^2, \\ D_{13} = D_{31} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_2} \varepsilon_3 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2^2} \varepsilon_1 \varepsilon_3 \\ D_{23} = D_{32} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_2} \varepsilon_3 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2^2} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad \text{e} \\ D_{33} &= \frac{\partial \psi}{\partial I_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_2} \varepsilon_3 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2^2} \varepsilon_3^2. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Uma energia de deformação específica quadrática dada por

$$\psi = \frac{1}{2} \Lambda I_1^2 + 2G I_2, \quad (3.41)$$

onde  $\Lambda$  e  $G$  são parâmetros do material, leva à seguinte equação constitutiva linear

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \Lambda + 2G & \Lambda & 0 \\ \Lambda & \Lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

### 3.3. Materiais elásticos ortótropos

Para materiais ortótropos a energia de deformação específica assume a seguinte forma geral

$$\psi = \hat{\psi}(I_1, I_2, I_3, I_4), \quad (3.43)$$

onde os invariantes

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad I_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_1^2, \quad I_3 = \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 \quad \text{e} \quad I_4 = \varepsilon_3^2 \quad (3.44)$$

são calculados com as componentes do tensor das deformações de Green determinadas no sistema cartesiano local de ortotropia do material. As direções da trama e do urdume do tecido da membrana são escolhas naturais para estes eixos locais. Assim, o vetor das tensões no sistema local de ortotropia do material passa a ser dado por

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \varepsilon_1 \\ \frac{\partial \psi}{\partial I_1} + \frac{\partial \psi}{\partial I_3} \varepsilon_2 \\ \frac{\partial \psi}{\partial I_4} \varepsilon_3 \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

A matriz dos módulos tangentes de rigidez elástica é dada por (3.15), ou seja, seus elementos são

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{\partial \psi}{\partial I_2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_2} \varepsilon_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2^2} \varepsilon_1^2, \\ D_{12} = D_{21} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_2} \varepsilon_1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_3} \varepsilon_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2 \partial I_3} \varepsilon_1 \varepsilon_2, \\ D_{22} &= \frac{\partial \psi}{\partial I_3} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_3} \varepsilon_2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_3^2} \varepsilon_2^2, \\ D_{13} = D_{31} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_4} \varepsilon_3 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_2 \partial I_4} \varepsilon_1 \varepsilon_3, \\ D_{23} = D_{32} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_1 \partial I_4} \varepsilon_3 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_3 \partial I_4} \varepsilon_2 \varepsilon_3 \quad \text{e} \\ D_{33} &= \frac{\partial \psi}{\partial I_4} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial I_4^2} \varepsilon_3^2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Uma energia de deformação específica como a abaixo mostrada

$$\psi = \varphi(I_1, I_2, I_3) + 2GI_4 \quad (3.47)$$

pode ser apropriada para membranas ortótropas existentes no mercado e fornece as seguintes expressões para o vetor das tensões e para os coeficientes da matriz dos módulos tangentes de rigidez elástica

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial I_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial I_2} \varepsilon_1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial I_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial I_3} \varepsilon_2 \\ 2G\varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{\partial \varphi}{\partial I_2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_1 \partial I_2} \varepsilon_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_2^2} \varepsilon_1^2, \\ D_{12} = D_{21} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_1 \partial I_2} \varepsilon_1 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_1 \partial I_3} \varepsilon_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_2 \partial I_3} \varepsilon_1 \varepsilon_2, \\ D_{22} &= \frac{\partial \varphi}{\partial I_3} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_1 \partial I_3} \varepsilon_2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial I_3^2} \varepsilon_2^2, \\ D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} &= 0 \quad \text{e} \\ D_{33} &= 2G. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Por exemplo, uma energia de deformação específica, com termos cúbicos, dada por

$$\psi = \frac{1}{2} AI_1^2 + BI_2 + CI_3 + \frac{1}{3} DI_1^3 + EI_1 I_2 + FI_1 I_3 + 2GI_4, \quad (3.50)$$

onde  $A, B, C, D, E, F$  e  $G$  são parâmetros do material, pertence a esta classe de funções e fornece as seguintes expressões para o vetor das tensões e a matriz dos módulos tangentes de rigidez elástica

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( \mathbf{D}_L + \frac{1}{2} \mathbf{D}_Q \right) \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{e} \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_L + \mathbf{D}_Q, \quad (3.51)$$

onde

$$\mathbf{D}_L = \begin{bmatrix} A+B & A & 0 \\ A & A+C & 0 \\ 0 & 0 & 2G \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_Q = \begin{bmatrix} (D+E)I_1 + 2E\varepsilon_1 & DI_1 + E\varepsilon_1 + F\varepsilon_2 & 0 \\ DI_1 + E\varepsilon_1 + F\varepsilon_2 & (D+F)I_1 + 2F\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.52)$$

Expressões mais complexas que (3.50) talvez se façam necessárias para se simular o enrugamento que ocorre em membranas na presença de encurtamentos em uma das direções de ortotropia.

### 3.4. Carregamentos externos

Os principais carregamentos sobre uma membrana são os devidos ao peso próprio, à pressão do vento e a eventuais sobrecargas de neve ou água acumulada.

O carregamento devido ao peso próprio provoca o aparecimento de forças externas nodais dadas por

$$\mathbf{P}_{\text{ext}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} V^r \rho^r \mathbf{g} \\ V^r \rho^r \mathbf{g} \\ V^r \rho^r \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

onde  $\mathbf{g}$  é o vetor da aceleração da gravidade. A matriz externa de rigidez tangente, definida por

$$\mathbf{k}_{\text{ext}} = \frac{\partial \mathbf{P}_{\text{ext}}}{\partial \mathbf{p}}, \quad (3.54)$$

é nula para o peso próprio.

O carregamento devido a uma pressão do vento  $p$  normal ao elemento triangular de membrana provoca o aparecimento de forças externas nodais dadas por

$$\mathbf{P}_{\text{ext}} = -\frac{1}{3} p A^c \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}, \quad (3.55)$$

onde  $A^c$  é a área do elemento de membrana na configuração corrente e  $\mathbf{n}$  é o versor normal ao plano do elemento. Note-se, contudo, que

$$A^c \mathbf{n} = -\frac{1}{2} \mathbf{l}_\alpha^c \times \mathbf{l}_\beta^c. \quad (3.56)$$

Logo, (3.55) é também expressa por

$$\mathbf{P}_{\text{ext}} = \frac{1}{6} p \begin{bmatrix} \mathbf{l}_\alpha^c \times \mathbf{l}_\beta^c \\ \mathbf{l}_\alpha^c \times \mathbf{l}_\beta^c \\ \mathbf{l}_\alpha^c \times \mathbf{l}_\beta^c \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

Por diferenciação de (3.56), chega-se em

$$\frac{\partial (\mathbf{l}_\alpha^c \times \mathbf{l}_\beta^c)}{\partial \mathbf{p}} = \Lambda_\alpha^c \mathbf{L}_\beta - \Lambda_\beta^c \mathbf{L}_\alpha, \quad (3.58)$$

onde  $\Lambda_\alpha^c$  e  $\Lambda_\beta^c$  são matrizes anti-simétricas, cujos vetores axiais são  $\mathbf{l}_\alpha^c$  e  $\mathbf{l}_\beta^c$ , respectivamente. Assim a matriz externa de rigidez tangente é dada por

$$\mathbf{k}_{\text{ext}} = \frac{1}{6} p \begin{bmatrix} \Lambda_\alpha^c \mathbf{L}_\beta - \Lambda_\beta^c \mathbf{L}_\alpha \\ \Lambda_\alpha^c \mathbf{L}_\beta - \Lambda_\beta^c \mathbf{L}_\alpha \\ \Lambda_\alpha^c \mathbf{L}_\beta - \Lambda_\beta^c \mathbf{L}_\alpha \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

Note-se que a matriz  $\mathbf{k}_{\text{ext}}$  acima não é simétrica.

### 3.5. Análise estrutural

De posse de  $\mathbf{P}_{\text{int}}$  e  $\mathbf{k}_{\text{int}}$  para todas os elementos da estrutura, pode-se calcular de forma usual o vetor dos esforços nodais internos e a matriz de rigidez tangente interna da estrutura por meio de

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\text{int}} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}^T \mathbf{k}_{\text{int}} \mathbf{A}, \quad (3.60)$$

respectivamente, onde  $\mathbf{R}_{\text{int}}$  é o vetor dos esforços internos nodais da estrutura,  $\mathbf{K}_{\text{int}}$  é a matriz interna de rigidez tangente da estrutura e  $\mathbf{A}$  é a matriz de conectividade ou incidência do elemento  $e$ , definida para cada elemento de forma que

$$\mathbf{p} = \mathbf{A} \mathbf{r}, \quad (3.61)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura no sistema global.

De forma análoga, o vetor dos esforços nodais externos e a matriz de rigidez tangente externa da estrutura podem ser montados por meio de

$$\mathbf{R}_{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}^T \mathbf{P}_{\text{ext}} \quad \text{e} \quad \mathbf{K}_{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}^T \mathbf{k}_{\text{ext}} \mathbf{A}. \quad (3.62)$$

O vetor dos esforços nodais residuais e a matriz total de rigidez tangente da estrutura são então dados por

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{ext}} - \mathbf{R}_{\text{int}} \quad \text{e} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{int}} - \mathbf{K}_{\text{ext}}, \quad (3.63)$$

respectivamente. A análise estática resume-se então em resolver o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad (3.64)$$

sujeito às restrições impostas pelos vínculos cinemáticos. A solução de (3.64) segue os passos de (2.32).

A matriz total de massa da estrutura é dada por

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{A}^T \mathbf{m} \mathbf{A}, \quad (3.65)$$

de modo que as equações diferenciais do movimento da estrutura podem ser expressas por

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{0}. \quad (3.66)$$

A análise dinâmica resume-se novamente em integrá-las, levando-se em conta as condições de contorno cinemáticas.

#### 4. Referências

- [1] Pimenta P.M., *Análise não-linear de treliças espaciais*, BT-PEF/8604, Boletim Técnico do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da USP, 1986.
- [2] Pimenta P.M., *Zur Eindeutigkeit der Bewegung nicht-viskoser Kontinua unter endlichen Dehnungen und deren Berechnung nach der Methode der finiten Elemente*, Dr.-Ing. Dissertation, Universität Stuttgart, 1982.
- [3] Raible, T., Reese, S., Wriggers, P., *A finite element formulation to model the orthotropic non-linearly elastic material behavior of pneumatic membranes*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 2000.
- [4] Reese, S., Raible, T, Wriggers, P., *Finite element modelling of orthotropic material behaviour in pneumatic membranes*, International Journal of Solids and Structures, 38, 9525-9544, 2001.
- [5] Pimenta, P. M., Maffei, C.E.M., Gonçalves, H.H.S., Pauletti, R.M.O., *A programming system for nonlinear dynamic and static analysis of tall buildings*. In: Computational Mechanics: new Trends and Applications. Edited by S. Idelsohn, E. Oñate, E. Dvorkin. Barcelona, 1998.